IX. osztály

1. Adott az $a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \ldots + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$ valós szám.

a) Számítsd ki az a szám egész részét!

b) Oldd meg az egész számok halmazán az $\left[\frac{x+1}{2}\right] = 2019[a]$ egyenletet, ahol $[t]$ a t valós szám egész részét jelöli!

Oláh-Ilkei Árpád, Barót

2. Igazold, hogy

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, bármely a, b pozitív valós szám esetén;

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{a+b+c}$, bármely a, b, c pozitív valós szám esetén;

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{a+b+c} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$, bármely a, b, c, d pozitív valós szám esetén!

Nagy Olga, Nagyszalonta

3. Adott az ABC háromszög és E, D és F pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$. Igazold, hogy

a) az A, F és D pontok kollineárisak;

b) $\frac{T_{FEA}}{T_{FDC}} = 3$.

Spier Tünde, Arad, *Szőts Ildikó*, Brassó

4. Egy kör alakú 1 kg tömegű pizzát egyenes vágásokkal darabokra osztunk. Ha tudjuk, hogy két vágás átmegy a pizza közepén, a harmadik pedig nem, bizonyítsd be, hogy létezik egy olyan darab, amelynek tömege legalább 166 g.

Matlap

Megoldások

1. Írhatjuk, hogy $a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \ldots + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\sqrt{90}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}(1-\sqrt{5})}{10}.$$

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow -2 < 1-\sqrt{5} < -1$ és $3 < \sqrt{10} < 4 \Rightarrow -6 < \sqrt{10}(1-\sqrt{5}) < -4$.
Ekkor $-1 < -0,6 < a < -0,4 < 0$, ahonnan $[a] = -1$.

b) $\left[\frac{x+1}{2}\right] = -2019 \Rightarrow -2019 \leq \frac{x+1}{2} < -2018$, ahonnan $-4039 \leq x < -4037$ és mivel $x \in \mathbb{Z}$, következik $M = \{-4039, -4038\}$.

2. a) Mivel a, b pozitív valós számok, így $a+b$ és ab is pozitív valós számok.
Írhatjuk, hogy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \iff \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \iff \frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4 \iff$
$\iff (a+b)^2 \geq 4ab \iff (a-b)^2 \geq 0$, ami igaz bármely a, b pozitív valós számok esetén.
Megjegyzés: Az egyenlőség fennáll, ha $a = b$.

b) Az a) alapján írhatjuk, hogy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c}$ és $\frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} = 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c}\right) \geq$

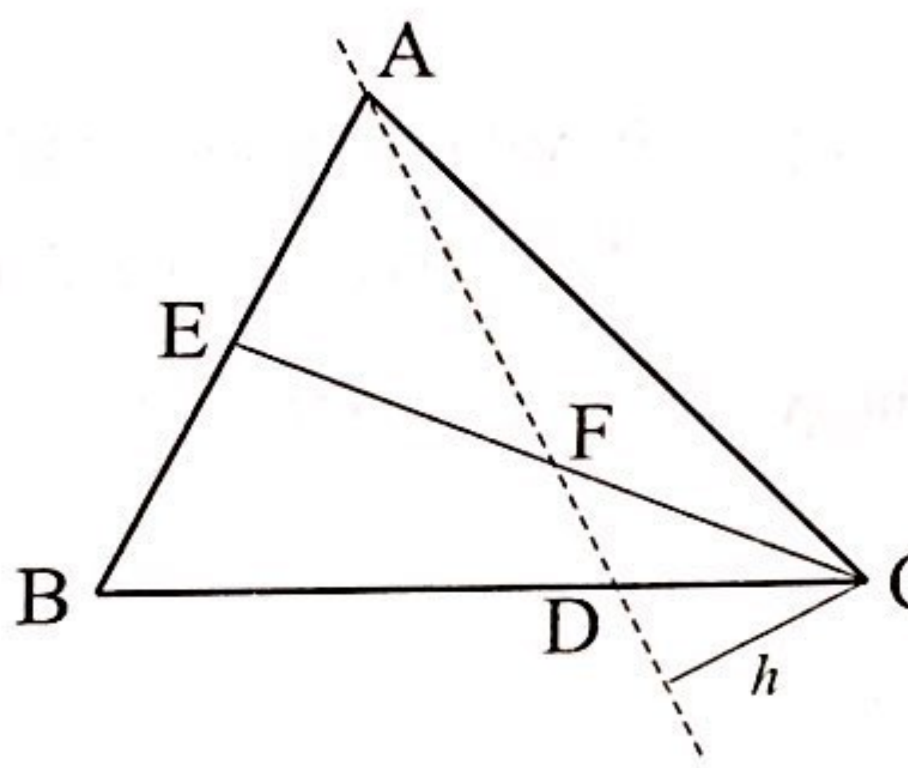
$\geq 4 \cdot \dfrac{4}{a+b+c} = \dfrac{16}{a+b+c}$, majd a két egyenlőtlenség alapján $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c} \geq \dfrac{16}{a+b+c}$, ami igaz bármely a, b, c pozitív valós számok esetén.

Megjegyzés: Az egyenlőség fennáll, ha $a=b$, $a+b=c$ és $a+b+c=d$.

c) Az a) és b) alapján írhatjuk, hogy

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}+\dfrac{16}{d} \geq \dfrac{16}{a+b+c}+\dfrac{16}{d}$ és $\dfrac{16}{a+b+c}+\dfrac{16}{d} = 16\left(\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{d}\right) \geq$
$\geq 16 \cdot \dfrac{4}{a+b+c+d} = \dfrac{64}{a+b+c+d}$, majd a két egyenlőtlenség alapján $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}+\dfrac{16}{d} \geq$
$\geq \dfrac{64}{a+b+c+d}$, ami igaz bármely a, b, c, d pozitív valós számok esetén.

Megjegyzés: Az egyenlőség fennáll, ha $a=b$, $a+b=c$ és $a+b+c=d$.



3. a) Írhatjuk, hogy $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$ és $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} =$
$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.

Ekkor $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, ahonnan $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, azaz az A, F és D pontok kollineárisak.

b) Mivel F az EC szakasz felezőpontja, következik, hogy $T_{AEF} = T_{AFC}$.

Legyen h a CFD háromszög C-ből húzott magassága, amely megegyezik az AFC háromszög C-ből húzott magasságával. Ekkor $\dfrac{T_{AEF}}{T_{FDC}} = \dfrac{T_{AFC}}{T_{FDC}} = \dfrac{AF \cdot \frac{h}{2}}{FD \cdot \frac{h}{2}} = \dfrac{AF}{FD}$ és a) alapján $\dfrac{AF}{FD} = 3$. Tehát $\dfrac{T_{FEA}}{T_{FDC}} = 3$.

4. Matlap 2018/9. sz. 354. old. L: 2893^{Δ}. feladat.

X. osztály

1. a) Tudva, hogy $x = \log_a(bc)$, $y = \log_b(ca)$, $z = \log_c(ab)$, $a, b, c \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, igazold, hogy $x + y + z + 2 = xyz$.

b) Adj példát olyan a, b és c páronként különböző természetes számokra, amelyekre az x, y és z is természetes számok!

2. Legyen $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Igazold, hogy $w = \dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha $|z| = 1$.

3. Az ABC háromszögben $\dfrac{a}{b} = 2+\sqrt{3}$ és a C szög mértéke $60°$.

a) Igazold, hogy $1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 0$.

b) Számítsd ki az A és a B szög mértékét!

4. Oldd meg a $2^{[4x-1]} = \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right]$ egyenletet a valós számok halmazán, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelenti.

Matlap

Megoldások

1. a) Írhatjuk, hogy $x = \log_a(bc) = \dfrac{\lg b + \lg c}{\lg a}$, $y = \log_b(ca) = \dfrac{\lg c + \lg a}{\lg b}$, $z = \log_c(ab) = $ $= \dfrac{\lg a + \lg b}{\lg c}$.

Ekkor $xyz = \dfrac{\lg b + \lg c}{\lg a} \cdot \dfrac{\lg c + \lg a}{\lg b} \cdot \dfrac{\lg a + \lg b}{\lg c} =$

$= \dfrac{(\lg b \cdot \lg c + \lg a \cdot \lg b + \lg^2 c + \lg a \cdot \lg c)(\lg a + \lg b)}{\lg a \cdot \lg b \cdot \lg c}$.

A számítások elvégzése után kapjuk, hogy

$xyz = 1 + \dfrac{\lg a}{\lg c} + \dfrac{\lg c}{\lg b} + \dfrac{\lg a}{\lg b} + \dfrac{\lg b}{\lg a} + \dfrac{\lg b}{\lg c} + \dfrac{\lg c}{\lg a} + 1 = 2 + \dfrac{\lg(bc)}{\lg a} + \dfrac{\lg(ca)}{\lg b} + \dfrac{\lg(ab)}{\lg c} =$

$= 2 + \log_a(bc) + \log_b(ca) + \log_c(ab) = x + y + z + 2$, amit igazolni kellett.

b) Legyen $z = 1$, akkor $x + y + 3 = xy \iff (x-1)(y-1) = 4 \Rightarrow x = 2,\ y = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \iff a^2 = bc \\ y = 5 \iff b^5 = ac \\ z = 1 \iff c = ab \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = b^2 \\ c = b^3 \end{array}\right. .$$

Ekkor például $b = 2$, $a = 4$, $c = 8$ teljesítik a kért feltételeket.

2. 1. *megoldás.* Ha $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, akkor $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Írhatjuk, hogy $w = \dfrac{1 + a + bi + a^2 - b^2 + 2abi}{1 - a - bi + a^2 - b^2 + 2abi} = \dfrac{(1 + a + a^2 - b^2) + b(1 + 2a)i}{(1 - a + a^2 - b^2) - b(1 - 2a)i} =$

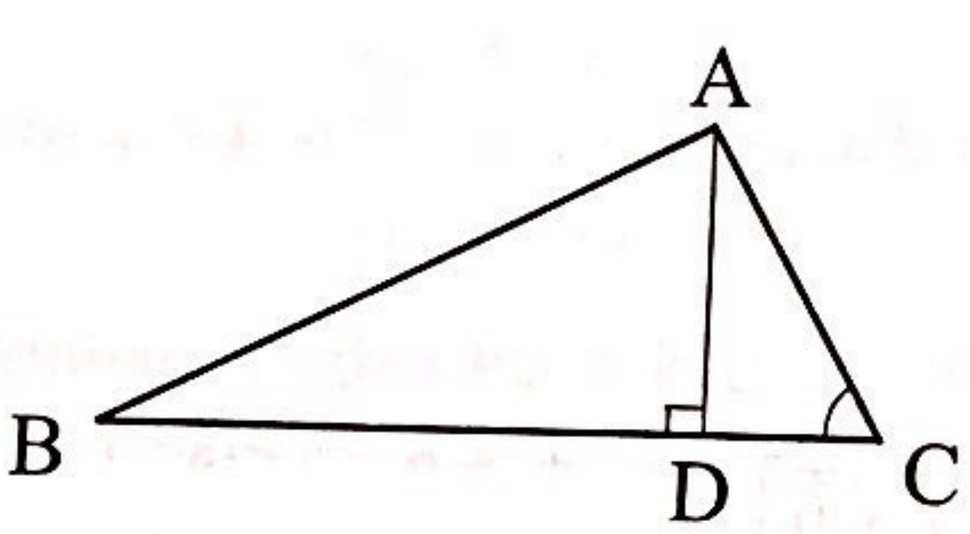
$= \dfrac{[(1 + a + a^2 - b^2) + b(1 + 2a)i][(1 - a + a^2 - b^2) + b(1 - 2a)i]}{[(1 - a + a^2 - b^2) - b(1 - 2a)i][(1 - a + a^2 - b^2) + b(1 - 2a)i]} =$

$= \operatorname{Re} w + \dfrac{(1 + a + a^2 - b^2)b(1 - 2a) + (1 - a + a^2 - b^2)b(1 + 2a)}{(1 - a + a^2 - b^2)^2 + b^2(1 - 2a)^2} \cdot i =$

$= \operatorname{Re} w + \dfrac{2(1 - a^2 - b^2)}{(1 - a + a^2 - b^2)^2 + b^2(1 - 2a)^2} \cdot i \in \mathbb{R}$.

$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} w = 0 \Leftrightarrow 2(1 - a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \iff |z| = 1$.

2. *megoldás.* $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{w} = w \Leftrightarrow \dfrac{1 + \overline{z} + \overline{z}^2}{1 - \overline{z} + \overline{z}^2} = \dfrac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2} \Leftrightarrow -z + \overline{z} + z^2 \cdot \overline{z} - z \cdot \overline{z}^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\overline{z} - z)(1 - z \cdot \overline{z}) = 0$. Ekkor $\overline{z} = z$, ami ellentmond a $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ feltételnek, illetve $1 - z \cdot \overline{z} = 0$, ami egyenértékű azzal, hogy $|z|^2 = 1$, azaz $|z| = 1$.



3. A feltétel alapján $b < a$, tehát $B < A$, ahonnan kapjuk, hogy a B és a C hegyesszögek, ezért az A-ból húzott magasság talppontja a BC szakaszra esik, az ábrának megfelelően.

Az ADC háromszögben a $\widehat{C}$ mértéke $60°$, ezért az $\widehat{A}$ mértéke $30°$.

Ekkor $CD = \dfrac{b}{2}$, $AD = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$ és $BD = BC - CD = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \cdot b$. Az ADB háromszögben $\operatorname{tg} B = \dfrac{AD}{DB} = 2 - \sqrt{3}$, az ABC háromszögben $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(180° - (B + C)) = -\operatorname{tg}(B + C) =$

$$= -\frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C} = -(2+\sqrt{3}).$$

Az előbbiek alapján $1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1 - (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 0$.

b) Az a) pontban igazolt összefüggést beszorozva $\cos A \cos B$-vel a $\cos A \cos B +$ $+ \sin A \sin B = 0$ összefüggéshez jutunk, vagyis $\cos(A-B) = 0$, ahonnan $A - B = 90°$.

Mivel $A + B = 120°$, következik, hogy a $\widehat{B}$ mértéke $15°$ és az $\widehat{A}$ mértéke $105°$.

4. Bizonyítjuk, hogy $0 < \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1} < 7$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahonnan következik, hogy $\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right] \leq 6$.

A fentiek helyett tekinthetjük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}$ függvényt, és meghatározzuk a függvényértékek halmazát: $\operatorname{Im} f = \left[\dfrac{10-2\sqrt{19}}{3}, \dfrac{10+2\sqrt{19}}{3}\right]$.

Tehát $\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right] \geq 0$, ahonnan $\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right] \in \mathbb{N}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, és ebből következik, hogy $[4x-1] \geq 0$, azaz $[4x-1] \in \mathbb{N}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Ezért $2^{[4x-1]} \in \{1,2,4,8,\ldots\}$ és $\operatorname{Im} f \cap \mathbb{Z} = \{1,2,3,4,5,6\}$, tehát $2^{[4x-1]} \in \{1,2,4\}$ és ebből $\left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right] \in \{1,2,4\}$.

1. *eset*:

$$2^{[4x-1]} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} [4x-1] = 0 \\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right] = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) \\ x \in (-\infty, -2-\sqrt{5}] \cup \left[-2+\sqrt{5}, \dfrac{2}{3}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = M_1.$$

2. *eset*:

$$2^{[4x-1]} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} [4x-1] = 1 \\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right] = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right) \\ x \in \left[-2-\sqrt{5}, -\dfrac{5}{2}\right) \cup \left(0, -2+\sqrt{5}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \varnothing = M_2.$$

3. *eset*: $2^{[4x-1]} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} [4x-1] = 2 \\ \left[\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}\right] = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\dfrac{3}{4}, 1\right) \\ x \in \left[\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}, \dfrac{-7-\sqrt{17}}{8}\right) \cup \left(\dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}, \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing = M_3.$$

Tehát $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) \cup \varnothing \cup \varnothing = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$.

XI. osztály

1. Kétféleképpen kiszámítva az $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ mátrix determinánsát, igazold a következő egyenlőtlenséget: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

b) Ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a + b + c = 1$, igazold, hogy $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc$.

Betuker Enikő, Margitta
Mastan Eliza, Nagybánya
Szilágyi Judit, Kolozsvár

2. Az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_{n+1} = x_n + \dfrac{3}{x_n}$, $x_0 = 1$.

a) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2}{n}$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n}$ határértéket!

Zákány Mónika, Nagybánya

3. Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mátrix.

a) Számítsd ki az A^n, $n \in \mathbb{N}^*$ mátrixot!
b) Számítsd ki $\det(A^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ értékét!

Matlap

4. Igazold, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 2019$ számok közül nem választható ki 100 olyan szám, amelyekből bármely kettőt összeadva, az így képezhető kéttagú összegek mind különbözzenek egymástól!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldások

1. a) Írhatjuk, hogy $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ és $\det A = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$,

ahonnan megkapjuk a kért egyenlőséget.

b) Ha $a+b+c = 1$, akkor az a) pont alapján $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$.

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \dfrac{1}{2}\left[a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (c-b)^2\right] \geq 0$.

Tehát $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$, ahonnan $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc$.

2. a) Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n > 0$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Ekkor $x_{n+1} - x_n = \frac{3}{x_n} > 0$, tehát az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan növekvő.

Mivel $(x_n)_{n\geq 0}$ szigorúan növekvő, ezért ha $(x_n)_{n\geq 0}$ korlátos, akkor létezik $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, ha pedig $(x_n)_{n\geq 0}$ nem korlátos, akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Feltételezzük, hogy a sorozat korlátos és $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Határértékre térünk a rekurzióban: $l = l + \frac{3}{l} \Rightarrow \frac{3}{l} = 0$, ami ellentmondás, tehát a sorozat nem korlátos és $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

b) Legyen $a_n = x_n^2$ és $b_n = n$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. A $(b_n)_{n\geq 0}$ sorozat szigorúan növekvő és korlátos.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)^2 - x_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{9}{x_n^2}\right) = 6.$$

Ekkor a Cesàro–Stolz-tétel alapján létezik $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 6$.

c) $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\frac{x_n}{\sqrt{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2$ és a b) alapján $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = 6$.

Mivel $\frac{x_n}{\sqrt{n}} > 0$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén és $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{6}$, következik, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x_n} = e^{\sqrt{6}}$.

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Igazoljuk indukcióval, hogy $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}$ alakú és $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2y_n & x_n + y_n & x_n + y_n \\ x_n + y_n & 2y_n & x_n + y_n \\ x_n + y_n & x_n + y_n & 2y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & y_{n+1} \\ y_{n+1} & x_{n+1} & y_{n+1} \\ y_{n+1} & y_{n+1} & x_{n+1} \end{pmatrix}$.

Ekkor $\begin{cases} x_{n+1} = 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$, tehát $\begin{cases} x_n = y_{n+1} - y_n \\ y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n \end{cases}$.

A második lineáris rekurencia karakterisztikus egyenlete $r^2 - r - 2 = 0$, melynek megoldásai 2 és -1, tehát $y_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$. Az $y_1 = 1$ és $y_2 = 1$ feltételekből $A = \frac{1}{3}$ és $B = -\frac{1}{3}$.

Tehát $y_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$ és $x_n = \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{2}{3} \cdot (-1)^{n-1}$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Tudjuk, hogy $\det(A^n) = (\det A)^n$. Mivel $\det A = 2$, ezért $\det(A^n) = 2^n$.

4. Az $1, 2, \ldots, 2019$ számokból képezhető legkisebb kéttagú összeg $1 + 2 = 3$, illetve legnagyobb kéttagú összeg $2018 + 2019 = 4037$, így a 2019 számból legtöbb 4035 különböző összeget kaphatunk.

Ha a 2019 számból kiválasztunk 100 számot, ezekből nyilvánvalóan nem kaphatunk ennél több különböző összeget.

Száz számból $C_{100}^2 = 4950$ számpárt alkothatunk, tehát 4950 összeget képezhetünk.

Mivel $4950 > 4037$, ezért ezek az összegek nem lehetnek mind különbözőek.

XII. osztály

1. Adottak az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ deriválható függvények, amelyek deriváltjai folytonosak.

a) Igazold, hogy $\int [f'(x) + f(x)g'(x)]e^{g(x)}\mathrm{d}x = f(x)e^{g(x)} + \mathcal{C}$.

b) Számítsd ki: $\displaystyle\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} \cdot e^{x+\frac{1}{x}} \mathrm{d}x$, ahol $x > 0$.

Matlap

2. Számítsd ki:

a) az $I - J$ integrált, ha $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$ és $J = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x}\mathrm{d}x$, ahol $x > 0$.

3. Öt számkártyára felírtuk az 1, 2, 3, 4 és 5 számokat, minden számkártyára pontosan egyet. Az öt számkártyát elhelyezzük az egymás mellett levő X, Y és Z dobozokba. Hány olyan elhelyezése van a számkártyáknak, amelyekben az X jelű dobozban levő számkártyákra írt számok összege osztható 5-tel? (Ha egy dobozba egy számkártya kerül, akkor az ezen levő számot tekintjük a számkártyákon levő számok összegének. Üres doboz esetén az összeg 0.)

4. A $G = (1, +\infty)$ halmazon értelmezett az $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ belső művelet bármely $x, y \in G$ esetén.

a) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Abel-féle csoport.

b) Határozd meg az m, n valós számokat úgy, hogy az $f\colon (0, +\infty) \to (1, +\infty)$ függvény, ahol $f(x) = \sqrt{mx + n}$ egy izomorfizmust valósítson meg az $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és a $(G, \circ)$ csoportok közt;

c) Számítsd ki $\sqrt{\dfrac{2 \cdot 1^2 + 2}{1^2 + 1 + 1}} \circ \sqrt{\dfrac{2 \cdot 2^2 + 2}{2^2 + 2 + 1}} \circ \ldots \circ \sqrt{\dfrac{2n^2 + 2}{n^2 + n + 1}}$ értékét!

Megoldások

1. Matlap 2019/2. sz. 79. old. L: 2951. feladat.

2. a) $I - J = \displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x =$
$= \ln(\sin x + \cos x) + \mathcal{C}$.

b) Legyen $I = \displaystyle\int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \cos x + \sin x}\mathrm{d}x$ és $J = \displaystyle\int \frac{\sin x}{e^x + \cos x + \sin x}\mathrm{d}x$.

Ekkor $I + J = x + \mathcal{C}_1$ és $I - J = \ln(e^x + \cos x + \sin x) + \mathcal{C}_2$.

Összegezve az egyenlőségeket kapjuk, hogy $I = \dfrac{1}{2}(x + \ln(e^x + \cos x + \sin x)) + \mathcal{C}$.

3. Matlap 2018/10. sz. 397. old. L: 2917^{Δ}. feladat.

4. a) A „$\circ$" művelet asszociatív, kommutatív, bármely $x, y, z \in (1, +\infty)$ esetén, létezik $e = \sqrt{2} \in (1, +\infty)$ semleges elem bármely $x \in (1, +\infty)$, valamint bármely $x \in (1, +\infty)$ esetén létezik $x' = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 - 1}} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}} > 1$, $x' \in G$ szimmetrikus elem.

b) $f(xy) = f(x) \circ f(y) \iff \sqrt{mxy+n} = \sqrt{mx+n} \circ \sqrt{my+n} =$

$= \sqrt{m^2xy + m(n-1)x + m(n-1)y + mn - 2n + 2}$, ahonnan $\begin{cases} m^2 = m \\ m(n-1) = 0 \\ mn - 2n + 2 = n \end{cases}$,

ahonnan $m \in \{0,1\}$, de mivel f nem lehet konstans függvény, ezért $m = n = 1$.

Tehát $f(x) = \sqrt{x+1}$ bijektív függvény.

c) Ha az $f\colon (0,+\infty) \to (1,+\infty)$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ függvény egy izomorfizmus a $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és $(G, \circ)$ között, akkor az $f^{-1}\colon (1,+\infty) \to (0,+\infty)$, $f^{-1}(x) = x^2 - 1$ is izomorfizmus a $(G,\circ)$ és $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ között.

Jelöljük $x_1 = \sqrt{\dfrac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1+1}}$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{2\cdot 2^2+2}{2^2+2+1}}, \ldots, x_n = \sqrt{\dfrac{2n^2+2}{n^2+n+1}}$, ekkor

$$f^{-1}(x_1) = \frac{2\cdot 1^2+2}{1^2+1+1} - 1 = \frac{1^2-1+1}{1^2+1+1},\ f^{-1}(x_2) = \frac{2\cdot 2^2+2}{2^2+2+1} - 1 = \frac{2^2-2+1}{2^2+2+1}, \ldots,$$

$$f^{-1}(x_n) = \frac{2n^2+2}{n^2+n+1} - 1 = \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}.$$

Ekkor $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} f^{-1}(x_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2-k+1}{k^2+k+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)^2-(n-1)+1}{(n-1)^2+(n-1)+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-3n+3}{n^2-n+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2+n+1}.$$

Tehát $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = f\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} f^{-1}(x_k)\right) = f\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{n^2+n+1} + 1} =$

$$= \sqrt{\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}}.$$

Műhelysarok

TALÁLGATUNK VAGY ÉPÍTÜNK?

Olosz Ferenc tanár, Szatmárnémeti

Érettségi vizsgára felkészítő feladatgyűjtemények feladatai között többször előforduló kérés, hogy keressünk egy bizonyos halmazból egy, két vagy több olyan elemet, amelyeknek egy adott művelet szerinti eredménye egy megadott halmaz eleme, vagy pedig egy konkrét elem. Ezek a feladatok nem kérik sem az összes megoldást, sem a megoldás menetét, csupán egyetlen konkrét példára kíváncsiak.

A tankönyvekben ritkán találunk ilyen jellegű kérdéseket, így a tanár feladata, hogy beavassa a tanulókat a keresés módozataiba és gyakoroltassa is azt. A matematikai gondolkodásban fontos szerepe van a konkretizálásnak, a konkrét példák adásának, mert ezek segítségével sikerül megérteni/megértetni az egyes elméleti részek, feladatok és jelölések értelmét, jelentését.

Az ilyen jellegű kérdésekre az első gondolataink egyike, hogy ki lehet-e könnyen találni egy példát (különösen akkor, ha nem ismerjük kellőképpen az idevágó elméleti ismereteket).